Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. UPCT
Titulación: Grado en Ingeniería Química
Asignatura: Matemáticas I

HOJA DE PROBLEMAS: MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS

1. Determinar el rango de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 3 \\ 8 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Hallar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(y realizar la comprobación de que en efecto es la inversa).

3. Hallar el valor de los siguientes determinantes

$$(a)\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \qquad (b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad (c)\ \begin{vmatrix} 1-i & 2 & i \\ 1+i & 3-i & 1 \\ 0 & -i & i+2 \end{vmatrix}$$

4. Discutir y resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$(a)\ \begin{cases} x+2y-z-2t=5 \\ -2x-4y+2z+4t=-10 \\ y+t=1 \\ x+3y-z-t=6 \\ x-z-4t=3 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} 2x-y+z=5 \\ -3x+2y+2z=0 \\ -x-2y+2z=0 \\ x+y+z=0 \\ 5x-6y-2z=0 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} x+2y-3z+t=2 \\ 2x-y-z-t=1 \\ -x+y+2z-t=0 \\ 3x+2y-4z-3t=1 \end{cases}$$

5. **Matrices en Ingeniería [3].** Las matrices aparecen en Ingeniería de las dos formas siguientes:

(a) De forma *directa*. El problema físico tiene un número finito de grados de libertad. Por ejemplo, en un sistema de muelles conectados a través de masas puntuales, uno conoce las fuerzas que actúan sobre el sistema (representadas por medio de un vector $f = (f_1, f_2, f_3)$) y desea conocer los desplazamientos $u = (u_1, u_2, u_3)$ de cada masa. Bajo las hipótesis de desplazamientos pequeños y lentos, las leyes físicas que expresan la relación entre fuerzas y desplazamientos (por ejemplo, la ley de Hooke: tensión proporcional a deformación) son lineales y se expresan matemáticamente por medio de sistemas de ecuaciones lineales en la forma

$$Ku = f \qquad (1)$$

donde K es una matriz. En muchas ocasiones, la matriz K es de la forma $K = A^T A$, por tanto *simétrica*, y además suele representar la energía del sistema, por tanto K es *definida positiva, o al menos semidefinida positiva*, pues la energía de un sistema físico nunca es negativa. Veamos un par de ejemplos sencillos pero muy ilustrativos:

a1) Cuatro muelles iguales están conectados a tres masas y fijos en las parte superior e inferior. Si denotamos por $u = (u_1, u_2, u_3)$ el vector que expresa el movimiento vertical (hacia arriba y hacia abajo) de cada una de las tres masas y si suponemos que sobre cada una de las masas sólo actúa la fuerza de la gravedad, entonces, en estado de equilibrio, la relación entre fuerzas y desplazamientos (que esencialmente se basa en la ley de Hooke) es de la forma (1) donde

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad y \quad f = \begin{bmatrix} m_1 g \\ m_2 g \\ m_3 g \end{bmatrix}.$$

La matriz K se suele llamar matriz de rigidez y, en el caso de que los tres muelles son idénticos, aparece multiplicada por una constante c que representa la rigidez del muelle. Tomamos $c = 1$ para simplificar. Calcula los desplazamientos de las tres masas, es decir, resuelve el sistema $Ku = f$.

a2) [1] En una red eléctrica se tienen dos fuentes de tensión $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$, siendo $\vec{V}_1 = 60_{45^o}$, esto es, el número complejo de módulo 60 y argumento 45º. Las leyes de Kirchhoff conducen al sistema de ecuaciones lineales $\vec{V} = R\vec{I}$, donde

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ 0 \\ \vec{V}_2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 5+5j & -5j & 0 \\ -5j & 8+8j & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{bmatrix} \quad e \quad \vec{I} = \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix}.$$

Calcula el valor que debe tomar $\vec{V}_2$ de modo que $\vec{I}_2$ sea igual a cero.

(b) De forma *indirecta*. El problema físico tiene un número infinito de grados de libertad. Por ejemplo, supongamos que tenemos una cuerda elástica de longitud 1 que está fija en sus dos extremos y supongamos también que sobre dicha cuerda actúa una fuerza vertical f. El objetivo es, al igual que en el caso de los muelles, calcular el desplazamiento de cada *punto material* de la cuerda. Decimos que el sistema tiene *infinitos grados de libertad* porque cada punto material de la cuerda se identifica con un número real $x \in [0, 1]$, y claro, el intervalo $[0, 1]$ contiene infinitos números reales. En este caso, las variables físicas (el desplazamiento $u(x)$ y la fuerza $f(x)$) son funciones y no vectores. La ley física subyacente (la misma que para los muelles, es decir la ley de Hooke) se expresa no como una ecuación matricial sino como una ecuación diferencial: en este caso,

$$-\frac{d}{dx}\left(c(x)\frac{du}{dx}\right) = f(x), \qquad (2)$$

donde $c(x)$ es una función o un número que representa las propiedades elásticas de la cuerda, su rigidez, la oposición que ofrece a ser deformada. Como veremos más adelante en este curso, algunas de estas ecuaciones diferenciales se pueden resolver explícitamente, pero otras muchas no. Es preciso resolverlas de forma numérica lo que implica una vuelta al mundo discreto del Cálculo Matricial. Veamos cómo se hace esto en el caso de la ecuación (2). Para simplificar, supongamos que $c(x) \equiv 1$. Supongamos que dividimos el intervalo $[0, 1]$ en 10 sub-intervalos de igual longitud $\Delta x = 0{,}1$. Pretendemos calcular el desplazamiento $u(x)$ en los nodos $x_j = j\Delta x$ con $1 \le j \le 9$ pues en los puntos $x = 0$ y $x = 1$ no hay desplazamiento. Por tanto, la función $u(x)$ se aproxima por el vector $\vec{u} = [u_1, u_2, \cdots, u_9]$. Evaluamos la fuerza vertical $f(x)$ en dichos nodos, con lo cual dicha función se aproxima por el vector $\vec{f} = [f_1, f_2, \cdots, f_9]$, donde $f_j = f(x_j)$, $1 \le j \le 9$. Finalmente, aproximamos la derivada segunda de u en la forma

$$\frac{d^2u(x_j)}{dx^2} \approx \frac{u(x_j + \Delta x) - 2u(x_j) + u(x_j - \Delta x)}{(\Delta x)^2}.$$

Con todos estos ingredientes, calcula la matriz K mediante la cual la ecuación diferencial (2) se expresa en forma discreta como un sistema de la forma $K\vec{u} = \vec{f}$. Es importante resaltar que pese a que este sistema es *en principio* igual que el que obtuvimos antes para el caso de los muelles, sin embargo, hay algo muy importante que los diferencia: **su tamaño**. En efecto, el tamaño de las matrices de los sistemas lineales que surjen al discretizar problemas continuos (como el de la cuerda elásitca) es muy grande lo que obliga a un tratamiento numérico de dichos sistemas.

6. **Matrices de Pauli para el spin de un electrón [2].** Una operación matricial que juega un papel fundamental en Mecánica Cuántica es el llamado *conmutador de dos matrices*. Sean A y B dos matrices cuadradas. Se define el conmutador de A y B, denotado $[A, B]$, como

$$[A, B] = AB - BA$$

Por otra parte, el spin de un electrón se suele representar a través de las siguientes tres matrices (llamadas matrices de Pauli y que representan el momento angular del spin en las tres coordenadas cartesianas)

$$S_x = \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_y = \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad S_z = \frac{1}{2}\hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, con h la constante de Planck, e $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria pura. Comprueba que

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y,$$

y que

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 I_3,$$

siendo I_3 la matriz identidad 3×3.

Referencias

[1] Apuntes de la asignatura Física II proporcionados por los profesores Esther Jódar y José Abad.

[2] E. Steiner, The Chemistry Maths Book, Oxford Science Publications, 1996.

[3] G. Strang, Introduction to Linear Algebra, Wellesley - Cambridge Press, 2009.

HOJA DE PROBLEMAS : MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

3 c) $$\begin{vmatrix} 1-i & 2 & i \\ 1+i & 3-i & 1 \\ 0 & -i & i+2 \end{vmatrix} = -i\, A_{32} + (i+2)\, A_{33}$$

$$= -i\,(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1-i & i \\ 1+i & 1 \end{vmatrix} + (i+2)\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1-i & 2 \\ 1+i & 3-i \end{vmatrix}$$

$$= i\,(1-i-i(1+i)) + (i+2)\,((1-i)(3-i) - 2(1+i))$$

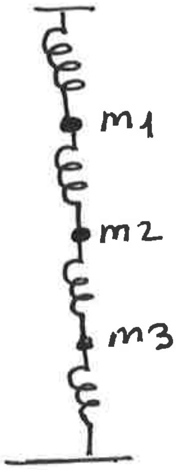
$$= i\,(1-i-i+1) + (i+2)(3-i-3i-1-2-2i)$$

$$= i+1+1+1 + 3i+1+3-2i+2+6-2i-6i-2-4-4i$$

$$= \boxed{9 + -10i}$$

5

a1)



$u_i \equiv$ desplazamiento (vertical) de la masa m_i, $i=1,2,3$.

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} m_1 g \\ m_2 g \\ m_3 g \end{pmatrix}$$

$$Ku = f$$

$$\left.\begin{aligned} 2u_1 - u_2 \qquad &= m_1 g \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 &= m_2 g \\ -u_2 + 2u_3 &= m_3 g \end{aligned}\right\}$$

$$|K| = 8 - (2+2) = 4.$$

$$u_1 = \frac{|M_1|}{|K|} = \frac{\begin{vmatrix} m_1 g & -1 & 0 \\ m_2 g & 2 & -1 \\ m_3 g & -1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4m_1 g + m_3 g - (m_1 g - 2m_2 g)}{4}$$

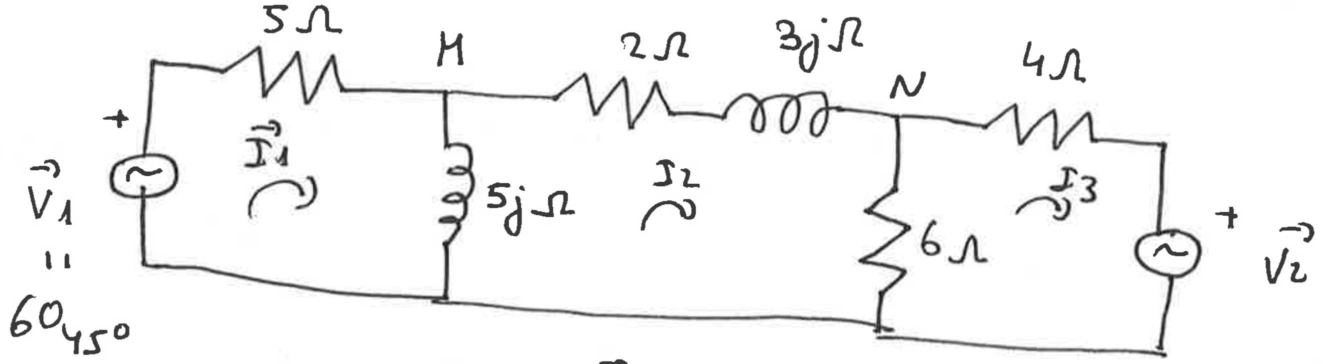
$$= \frac{3m_1 g + 2m_2 g + m_3 g}{4}$$

$$= \frac{3}{4} m_1 g + \frac{1}{2} m_2 g + \frac{1}{4} m_3 g.$$

$$u_2 = \frac{|M_2|}{|K|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & m_1 g & 0 \\ -1 & m_2 g & -1 \\ 0 & m_3 g & 2 \end{vmatrix}}{|K|} = \frac{1}{2} m_1 g + m_2 g + \frac{1}{2} m_3 g.$$

$$u_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & m_1 g \\ -1 & 2 & m_2 g \\ 0 & -1 & m_3 g \end{vmatrix}}{|K|} = \frac{1}{4} m_1 g + \frac{1}{2} m_2 g + \frac{3}{4} m_3 g.$$

(a2)



$$\vec{V} = R\,\vec{I}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{V}_1 \\ 0 \\ \vec{V}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5+5j & -5j & 0 \\ -5j & 8+8j & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{I_2} = \frac{\begin{vmatrix} 5+5j & \vec{V_1} & 0 \\ -5j & 0 & -6 \\ 0 & \vec{V_2} & 10 \end{vmatrix}}{|R|} = 0 \iff$$

$$\begin{vmatrix} 5+5j & 60_{45^\circ} & 0 \\ -5j & 0 & -6 \\ 0 & \vec{V_2} & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$$- -6\vec{V_2}(5+5j) + 10(-5j) \cdot 60_{45^\circ} = 0$$

$$\vec{V_2} = \frac{10(-5j) \cdot 60_{45^\circ}}{30+30j}$$

$$= - \frac{10_{0^\circ} \cdot 5_{90^\circ} \cdot 60_{45^\circ}}{42'43_{45^\circ}} = - \frac{3000_{\cancel{135}}\ {}_{-45^\circ}}{42'43_{45^\circ}}$$

$$= \boxed{70'7_{-90^\circ}}$$

$$|30+30j| = \sqrt{30^2+30^2} \simeq 42'43$$

$$\arg \theta = \arctan \frac{30}{30} = \arctan 1 = 45^\circ$$

④ ⓐ

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ -2 & -4 & 2 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 \to F_4 - F_1]{F_2 \to F_2 + 2F_1}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \to F_2 + 2F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|b) = 2 < 4 =$ nº incógnitas (SCI)

La solución depende de 2 parámetros.

El sistema original es equivalente a

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y - z - 2t = 5 \\ y + t = 1 \end{array}\right\} \to y = 1 - t = 1 - \alpha$$

$t = \alpha$

$z = \beta$

$$\begin{aligned} x &= 5 + 2t + z - 2y \\ &= 5 + 2\alpha + \beta - 2(1-\alpha) \\ &= 5 + 4\alpha + \beta - 2 \\ &= 3 + 4\alpha + \beta \end{aligned}$$

ÁLGEBRA LINEAL COMPUTACIONAL

Objetivo: calcular determinantes, inversas de matrices y resolver sistemas lineales de gran tamaño de manera eficaz desde un punto de vista computacional, ~~es decir~~, haciendo uso de los ordenadores.

FACTORIZACIÓN LU DE UNA MATRIZ CUADRADA

Dada $A \in M_{n \times n}$ se trata de calcular dos matrices, una de ellas triangular inferior y con 1s en la diagonal principal (L), y otra triangular superior (U) de modo que

$$A = L \cdot U$$

es decir,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ l_{n1} & \cdots & & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{L \\ \parallel \\ \text{Lower}}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u_{nn} \end{pmatrix}}_{\substack{U \\ \parallel \\ \text{Upper}}}$$

¿Cómo calcular los coeficientes de L y de U?

Se tiene:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj}$$

Como $l_{ik} = 0$ si $k > i$ y $u_{kj} = 0$ si $k > j$, entonces podemos distinguir dos casos:

$\boxed{\text{Caso 1: } i > j}$ $\qquad \min\{i, j\} = j$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} u_{kj}$$

$$\cancel{= l_{i1} u_{1}}.$$

$$= l_{i1} u_{1j} + l_{i2} u_{2j} + \dots + l_{ij} u_{jj}$$

$$\rightarrow \quad l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}}$$

$\boxed{\text{Caso 2 : } i \leq j}$ $\qquad \min\{i, j\} = i$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} u_{kj} = l_{i1} u_{1j} + l_{i2} u_{2j} + \dots + l_{ii} u_{ij}$$

$$\rightarrow \left\{ u_{ij} = - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right\}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underset{-\frac{1}{2}}{\underset{\parallel}{l_{21}}} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} \overset{2}{\overset{\parallel}{u_{11}}} & \overset{8}{\overset{\parallel}{u_{12}}} \\ 0 & \underset{3.}{\underset{\parallel}{u_{22}}} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = u_{11} = 2$$

$$8 = a_{12} = u_{12}$$

$$-1 = a_{21} = l_{21} u_{11} \rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$-1 = a_{22} = l_{21} u_{12} + u_{22} \rightarrow u_{22} = -1 - l_{21} u_{12}$$

$$= -1 + \frac{1}{2} 8$$

$$= 3$$

APLICACIONES DE LA FACTORIZACIÓN LU

1) Cálculo de determinantes

$$\det(A) = \det(L)\det(U)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \underbrace{l_{ii}}_{1} \prod_{j=1}^{n} u_{jj}$$

$$= u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}.$$

2) Resolución de sistemas lineales

$$Ax = b \iff LUx = b \iff L(\underbrace{Ux}_{z}) = b$$

$\iff$ $Lz = b$ $\to$ se resuelve fácilmente por ser triangular inferior

$Ux = z$ $\to$ se resuelve fácilmente por ser triangular superior.

Coste computacional (eficacia de los algoritmos)

	LU	Determinantes
det	$\frac{n^2+2n-3}{3}$	$n! \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!}$
$Ax = b$	$\frac{n^3+3n^2-n}{3}$	$n+(n+1)! \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!}$
$\cancel{A}$	$\cancel{\frac{4n^3-n}{3}}$	$\cancel{n^2+n \cdot n! \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i!}}$

$A \in M_{n\times n}$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$Lz = b \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{z_1 = -2}$$

$$-\frac{1}{2} z_1 + z_2 = 2 \rightarrow 1 + z_2 = 2 \rightarrow \boxed{z_2 = 1}$$

$$Ux = z \iff \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 8x_2 = -2 \\ 3x_2 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1}{3}} \qquad 2x_1 + \frac{8}{3} = -2 \rightarrow$$

$$2x_1 = -2 - \frac{8}{3} = \frac{-14}{3}$$

$$\boxed{x_1 = -\frac{7}{3}}$$